

Sumber: www.rit.edu

B a b 1

Gerak dalam Dua Dimensi

Pada bab ini, Anda akan diajak untuk dapat menganalisis gejala alam dan keteraturannya dalam cakupan mekanika benda titik dengan cara menganalisis gerak lurus, gerak melingkar, dan gerak parabola dengan menggunakan vektor.

Pernahkah Anda menjentikkan uang logam dengan jari-Anda? Jika Anda pernah melakukannya dan dapat mengamati bentuk lintasan yang dibentuk saat uang logam itu bergerak, Anda akan dapat melihat bahwa lintasan tersebut berbentuk parabola. Bentuk lintasan uang logam yang berbentuk parabola tersebut dapat difoto menggunakan *stroboscope*, seperti terlihat pada gambar.

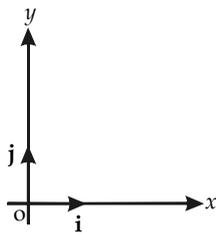
Di Kelas X, Anda telah mempelajari gerak lurus dan gerak melingkar. Dalam materi bab ini, Anda akan mempelajari tentang gerak secara keseluruhan, yaitu gerak lurus, gerak parabola, dan gerak melingkar dengan menggunakan analisis vektor, perhitungan diferensial, dan integral.

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda akan memahami bahwa gerak parabola dapat dianalisis melalui perpaduan antara gerak lurus beraturan (GLB) dan gerak lurus berubah beraturan (GLBB) yang arahnya saling tegak lurus. Dapatkah Anda menyebutkan contoh-contoh gerak keseharian lain yang lintasannya berbentuk parabola?

- A. Persamaan Gerak Benda**
- B. Gerak Parabola**
- C. Gerak Melingkar**

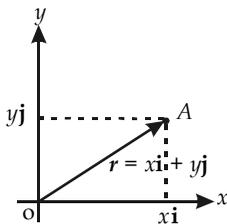
Soal Pramateri

1. Apakah perbedaan antara besaran vektor dan skalar?
2. Sebutkanlah definisi posisi, perpindahan, kecepatan, dan percepatan.
3. Jelaskanlah pengertian kecepatan sudut.



Gambar 1.1

Vektor satuan \mathbf{i} pada arah sumbu- x dan vektor satuan \mathbf{j} pada arah sumbu- y .



Gambar 1.2

Posisi titik A dinyatakan dalam vektor posisi dengan $r_A = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Gambar 1.3

Posisi titik A apabila dinyatakan dalam vektor posisi $r_A = (5\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ cm.

A Persamaan Gerak Benda

Apakah yang dimaksud dengan gerak? Banyak definisi telah dikemukakan oleh para ilmuwan untuk mendeskripsikan gerak. Namun, secara Fisika Anda dapat menyatakan bahwa gerak ditentukan karena adanya kelajuan, kecepatan, dan percepatan benda. Seluruh kajian tentang gerak benda yang Anda pelajari akan berhubungan dengan kedudukan benda, kecepatan, percepatan, dan waktu. Dalam membahas tentang gerak benda, seringkali benda dimisalkan sebagai partikel atau benda titik, yaitu benda yang ukurannya diabaikan dan memiliki massa tetap (konstan). Hal ini dimaksudkan untuk memudahkan dalam mempelajari gerak benda tersebut. Di Kelas X, Anda telah mempelajari tentang gerak lurus dan gerak melingkar, serta hubungan antara gaya dan percepatan. Dalam bab ini, Anda akan mempelajari materi tentang gerak dengan lebih dalam menggunakan perhitungan vektor, diferensial, dan integral.

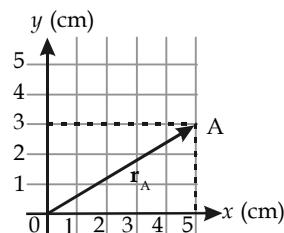
1. Vektor Posisi

Di Kelas X, Anda telah mempelajari bahwa besaran dalam Fisika digolongkan ke dalam dua kelompok, yaitu besaran skalar dan besaran vektor. Besaran skalar adalah besaran yang hanya memiliki nilai saja, sedangkan besaran vektor adalah besaran yang memiliki nilai dan arah. Bandingkanlah kedua pernyataan berikut. Mobil Ali bergerak dengan kecepatan 60 km/jam ke utara. Mobil Budi bergerak dengan kelajuan 60 km/jam. Manakah dari dua pernyataan tersebut yang merupakan besaran vektor? Kecepatan memiliki besar dan arah sehingga disebut sebagai besaran vektor, sedangkan kelajuan hanya memiliki besar saja sehingga disebut sebagai besaran skalar. Apabila benda dianggap sebagai benda titik, atau partikel, posisi benda tersebut pada suatu bidang dapat dinyatakan dengan vektor posisi r , yaitu sebuah vektor yang ditarik dari titik asal sampai ke posisi titik tersebut berada. Vektor posisi r suatu partikel pada bidang xy dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (1-1)$$

dengan (x, y) adalah koordinat partikel, sementara \mathbf{i} dan \mathbf{j} adalah vektor satuan yang menyatakan arah pada sumbu- x dan sumbu- y . Vektor satuan memiliki nilai 1 satuan.

Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah **Gambar 1.3** berikut.



Posisi partikel A di bidang xy adalah pada $x = 5$ cm dan $y = 3$ cm, atau pada koordinat $(5, 3)$. Vektor posisi partikel A dinyatakan sebagai berikut.

$$r_A = x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} = (5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \text{ cm.}$$

2. Perpindahan

Perpindahan adalah perubahan posisi (kedudukan) suatu benda dalam waktu tertentu. Sebuah partikel berpindah dari titik P ke titik Q menurut lintasan kurva PQ, seperti pada **Gambar 1.4**. Apabila posisi titik P dinyatakan sebagai r_p dan posisi titik Q dinyatakan sebagai r_Q maka perpindahan yang terjadi dari titik P ke titik Q tersebut adalah vektor Δr , yaitu

$$\Delta r = r_Q - r_p \quad (1-2)$$

Persamaan (1-2) jika diubah dalam kalimat dapat dinyatakan bahwa perpindahan suatu benda sama dengan posisi akhir benda dikurangi posisi awal.

Bagaimanakah cara menentukan besar perpindahan yang dilakukan oleh partikel tersebut? Setiap benda membutuhkan waktu untuk berpindah atau mengubah kedudukannya. Dalam kasus perpindahan tersebut, pada saat $t = t_1$ partikel berada di titik P dengan vektor posisinya r_p . Pada saat $t = t_2$, partikel berada di titik Q dengan vektor posisinya r_Q .

Kemudian, apabila $r_p = (x_p \mathbf{i} + y_p \mathbf{j})$ dan $r_Q = (x_Q \mathbf{i} + y_Q \mathbf{j})$, **Persamaan (1-2)** dapat dituliskan menjadi $r_{PQ} = (x_Q \mathbf{i} + y_Q \mathbf{j}) - (x_p \mathbf{i} + y_p \mathbf{j}) = (x_Q - x_p) \mathbf{i} + (y_Q - y_p) \mathbf{j}$. Apabila $x_Q - x_p = \Delta x$ dan $y_Q - y_p = \Delta y$, serta perpindahan yang dilakukan partikel r_{PQ} dinyatakan sebagai Δr , **Persamaan (1-2)** berubah menjadi

$$\Delta r = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} \quad (1-3)$$

Oleh karena besar perpindahan partikel Δr sama dengan panjang vektor Δr maka dapat dituliskan

$$|\Delta r| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (1-4)$$

Arah perpindahan partikel dapat ditentukan dari besar sudut yang dibentuk oleh vektor perpindahan Δr terhadap sumbu- x . Perhatikanlah **Gambar 1.5** berikut.

Apabila sudut yang dibentuk oleh vektor perpindahan Δr terhadap sumbu- x adalah θ , arah perpindahan vektor Δr dinyatakan sebagai

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1-5)$$

Contoh 1.1

Sebuah titik materi bergerak dari titik P (3, 2) ke titik Q (11, 8). Tuliskanlah vektor posisi titik itu ketika berada di titik P dan di titik Q. Hitunglah vektor perpindahan dari titik P ke titik Q serta besar dan arah vektor perpindahan tersebut.

Jawab

Diketahui: koordinat di titik P (3, 2) dan di titik Q (11, 8).

Vektor posisi di titik P (r_p) dan vektor posisi di titik Q (r_Q) adalah

$$r_p = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$r_Q = 11\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

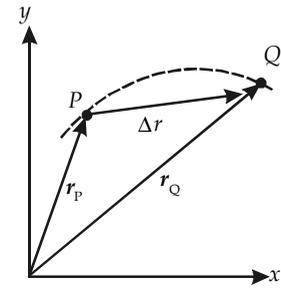
Vektor perpindahan dari titik P ke titik Q adalah Δr yang diperoleh sebagai berikut

$$\Delta r = r_Q - r_p = (11\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) - (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$\Delta r = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

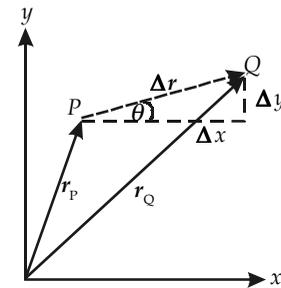
Besar vektor Δr adalah

$$|\Delta r| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ satuan}$$



Gambar 1.4

Garis putus-putus menyatakan lintasan partikel. Perpindahan posisi partikel dari posisi awal di titik P ke posisi titik Q dinyatakan dengan Δr .



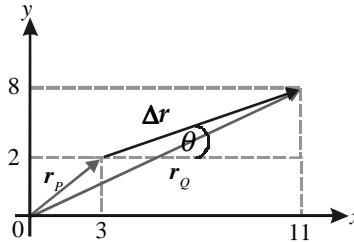
Gambar 1.5

Perpindahan vektor Δr menurut sumbu- x adalah sebesar Δx dan menurut sumbu- y sebesar Δy .



Arah perpindahan vektor itu adalah $\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ sehingga $\theta = 37^\circ$

Jadi, vektor perpindahan adalah $\Delta \mathbf{r} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, panjang perpindahannya 10 satuan, dan sudut arah perpindahannya 37° terhadap arah sumbu- x positif. Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah gambar berikut.

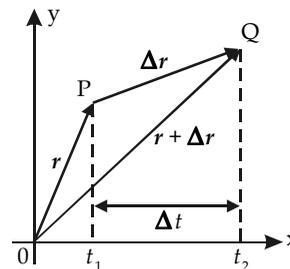


3. Kecepatan Rata-Rata dan Kecepatan Sesaat

Secara matematis, kecepatan didefinisikan sebagai perubahan posisi per satuan waktu. Di Kelas X, Anda telah mempelajari tentang kecepatan yang terbagi atas kecepatan rata-rata dan kecepatan sesaat. Sekarang, Anda akan membahas analisis mengenai kedua jenis kecepatan tersebut ditinjau dari perhitungan vektor.

a. Kecepatan Rata-Rata

Perhatikanlah **Gambar 1.6**. Posisi benda di titik P pada saat t dinyatakan sebagai \mathbf{r} . Kemudian, benda tersebut berpindah selama selang waktu Δt sejauh $\Delta \mathbf{r}$ sehingga pada saat $t + \Delta t$, benda berada di titik Q dengan posisi $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$.



Gambar 1.6

Sebuah benda berpindah secara linear dari titik P ke titik Q.

Berdasarkan **Persamaan (1-3)** dapat dituliskan perpindahan posisi benda adalah sebagai berikut.

$$\Delta \mathbf{r} = (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{r}$$

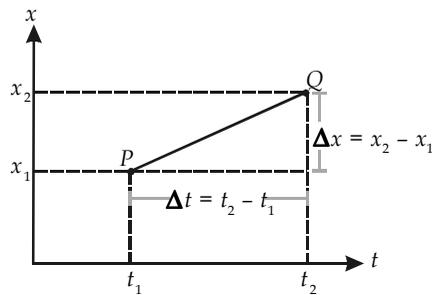
Berdasarkan definisi matematis kecepatan, dapat dituliskan

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{r}}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1-6)$$

dengan $\bar{\mathbf{v}}$ atau $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ disebut kecepatan rata-rata. Kecepatan rata-rata benda dalam arah sumbu- x dan sumbu- y dapat dicari dengan cara memasukkan nilai $\Delta \mathbf{r}$ dari **Persamaan (1-3)** sebagai berikut.

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j} \quad (1-7)$$

Perhatikanlah **Gambar 1.7**. Gambar tersebut menunjukkan grafik perpindahan benda dari titik P ke titik Q menurut sumbu- x .



Gambar 1.7

Apabila gerak benda hanya pada arah sumbu- x maka kecepatan rata-rata benda \bar{v}_x adalah kemiringan garis yang menghubungkan titik P dengan titik Q, yaitu $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa selama selang waktu Δt , benda berpindah sejauh Δx . Oleh karena itu, kecepatan rata-rata benda dalam arah sumbu- x , yaitu $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ dituliskan dengan lambang \bar{v}_x . Apabila benda tersebut juga berpindah menurut sumbu- y , kecepatan rata-rata benda dalam arah sumbu- y , yaitu $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ dituliskan dengan lambang \bar{v}_y . Dengan demikian, kecepatan rata-rata sebuah benda pada bidang xy dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \bar{v}_x \mathbf{i} + \bar{v}_y \mathbf{j} \quad (1-8)$$

Besar kecepatan rata-rata benda dapat dihitung menggunakan persamaan berikut.

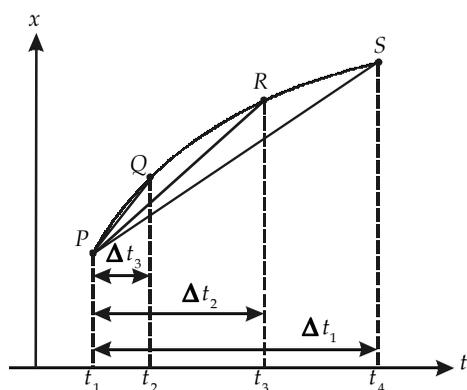
$$|\bar{\mathbf{v}}| = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2} \quad (1-9)$$

b. Kecepatan Sesaat

Kecepatan sesaat suatu benda dapat diketahui dengan cara menghitung kecepatan rata-rata benda tersebut untuk selang waktu yang sangat singkat atau Δt mendekati nol. Penulisiannya secara matematis adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1-10)$$

Perhatikanlah **Gambar 1.8** berikut.



Perlu Anda

Ketahui

$\frac{dr}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, dan $\frac{dy}{dt}$ disebut

fungsi turunan posisi (r , x , atau y) terhadap waktu t . Rumus fungsi turunan:

$$r = at^n \rightarrow \frac{dr}{dt} = nat^{n-1}$$

contoh:

$$r = 3t^4 \rightarrow \frac{dr}{dt} = (4)(3)(t^{4-1}) = 12t^3$$

Gambar 1.8

Grafik x terhadap t untuk selang waktu Δt yang semakin kecil.



Dari gambar tersebut, dapat Anda lihat bahwa kemiringan garis yang menyatakan kecepatan rata-rata suatu benda akan semakin curam apabila selang waktu perpindahannya semakin kecil. Oleh karena itu, kecepatan sesaat dapat didefinisikan sebagai kemiringan garis tangensial pada titik P , yaitu turunan posisi terhadap waktu.

Pada **Gambar 1.8**, kecepatan sesaatnya secara matematis dituliskan sebagai berikut.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (1-11)$$

Dalam kajian vektor, kecepatan sesaat benda yang bergerak menurut sumbu- x dan sumbu- y dinyatakan sebagai berikut.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} \quad (1-12)$$

Oleh karena $\frac{dx}{dt} = v_x$ dan $\frac{dy}{dt} = v_y$ maka **Persamaan (1-12)** dapat dituliskan menjadi

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} \quad (1-13)$$

Besarnya kecepatan sesaat atau kelajuan rata-rata benda dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (1-14)$$

Perhatikanlah **Gambar 1.9**. Dari grafik kecepatan terhadap waktu benda di titik P yang memiliki kecepatan \mathbf{v} , arah kecepatan benda di titik tersebut terhadap sumbu- x dinyatakan dengan θ .

Besar θ secara matematis, dapat diperoleh sebagai berikut

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad (1-15)$$

dengan: $v_x = v \cos \theta$, dan

$$v_y = v \sin \theta.$$

Contoh 1.2

Sebuah partikel sedang bergerak pada suatu bidang dengan sumbu koordinat x dan y . Posisi partikel berubah terhadap waktu mengikuti persamaan $\mathbf{r} = (6 + 3t)\mathbf{i} + (8 + 4t)\mathbf{j}$ dengan r dalam meter dan t dalam sekon. Tentukanlah:

- perpindahan partikel dalam selang waktu $t = 0$ hingga $t = 2$ sekon;
- besar kecepatan rata-rata partikel dalam selang waktu $t = 0$ hingga $t = 2$ sekon;
- besar dan arah kecepatan partikel pada saat $t = 2$ sekon.

Jawab

Diketahui: vektor posisi partikel, yaitu $\mathbf{r} = (6 + 3t)\mathbf{i} + (8 + 4t)\mathbf{j}$.

- $t_1 = 0$ sekon adalah $\mathbf{r}_1 = [6 + (3)(0)]\mathbf{i} + [8 + (4)(0)]\mathbf{j} = (6\mathbf{i} + 8\mathbf{j})$ meter.
 $t_2 = 2$ sekon adalah $\mathbf{r}_2 = [6 + (3)(2)]\mathbf{i} + [8 + (4)(2)]\mathbf{j} = (12\mathbf{i} + 16\mathbf{j})$ meter.

Perpindahan partikel dari $t_1 = 0$ sekon hingga $t_2 = 2$ sekon adalah

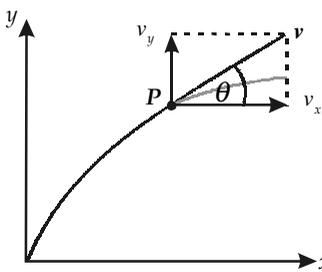
$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (12\mathbf{i} + 16\mathbf{j}) - (6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) = (6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \text{ meter}$$

Besar vektor $\Delta \mathbf{r}$ adalah

$$\Delta r = |\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ m.}$$

- Kecepatan rata-rata partikel adalah

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}}{2 - 0} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \text{ m/s}$$



Gambar 1.9

Arah percepatan \mathbf{v} di titik P terhadap sumbu- x positif.

Perlu Anda

Ketahui

Pada buku ini, besaran vektor ditulis dengan huruf tebal dan miring, contohnya: \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{a} . Adapun, vektor satuan ditulis dengan huruf tebal dan tegak, contohnya: \mathbf{i} , \mathbf{j} , dan \mathbf{k} .

Besar kecepatan rata-rata partikel adalah

$$|\bar{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m/s.}$$

- c. Vektor kecepatan partikel sebagai fungsi waktu ditentukan sebagai berikut.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(6 + 3t) = 3 \text{ m/s}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(8 + 4t) = 4 \text{ m/s}$$

Dengan demikian, diperoleh vektor kecepatan sesaat partikel adalah

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \text{ m/s.}$$

Besar kecepatan sesaat partikel adalah

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m/s.}$$

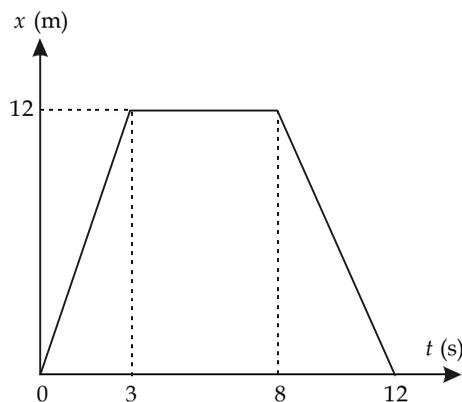
Arah vektor kecepatan sesaat terhadap sumbu- x adalah θ dengan

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4}{3}$$

$$\theta = 53^\circ.$$

Contoh 1.3

Perhatikan grafik kedudukan (x) terhadap waktu (t) berikut.



Tentukanlah kecepatan rata-rata benda dalam selang waktu:

- antara $t = 0$ sampai $t = 3$ s;
- antara $t = 3$ sampai $t = 8$ s; dan
- antara $t = 8$ sampai $t = 12$ s.

Jawab

Diketahui: grafik $x-t$ dan kecepatan rata-rata $\bar{v} = \frac{\Delta x \mathbf{i}}{\Delta t}$.

- a. Kecepatan rata-rata benda antara $t = 0$ sampai $t = 3$ s adalah

$$\bar{v} = \frac{(12-0)\mathbf{i}\text{m}}{(3-0)\text{s}} = 4\mathbf{i} \text{ m/s}$$

- b. Kecepatan rata-rata benda antara $t = 3$ sampai $t = 8$ s adalah

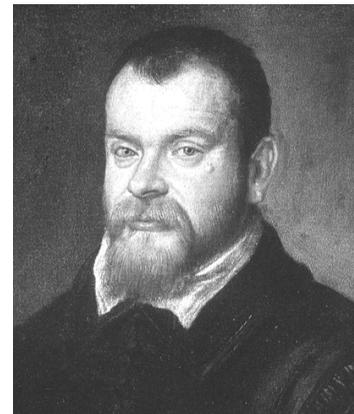
$$\bar{v} = \frac{(12-12)\mathbf{i}\text{m}}{(8-3)\text{s}} = 0\mathbf{i} \text{ m/s}$$

- c. Kecepatan rata-rata benda antara $t = 8$ sampai $t = 12$ s adalah

$$\bar{v} = \frac{(0-12)\mathbf{i}\text{m}}{(12-8)\text{s}} = -3\mathbf{i} \text{ m/s}$$

Jelajah Fisika

Galileo Galilei
(1564–1642)



Galileo lahir di Pisa, Italia. Pada umur 19 tahun, ia mempelajari matematika dan mengembangkan penelitiannya tentang gerak mekanik, terutama mengenai gerak di bidang miring, gerak pendulum, dan gerak jatuh bebas. Saat mengajar di Universitas Padua, ia menjadi penyokong teori Copernicus mengenai sistem Matahari, yang bertentangan dengan teori yang diakui saat itu. Saat menerbitkan karyanya, ia disidang untuk menyangkal hasil penelitiannya, namun ia tetap yakin dengan penelitiannya dan tidak mau menyerah. Setelah ia dijatuhi hukuman tahanan rumah, ia meninggal pada umur 78 tahun. Walaupun begitu, ia menyelesaikan penelitiannya mengenai gerak. Karya tulisnya, kemudian diselundupkan dari Italia dan diterbitkan di Belanda.

Sumber: www.hao.ucar.edu

Perlu Anda

Ketahui

\int adalah lambang integral.
rumus integral:

$$r = \int at^n dt \rightarrow r = \frac{a}{n+1} t^{n+1}$$

contoh:

$$r = \int 4t^3 dt \rightarrow r = \frac{4}{3+1} t^{3+1} = t^4$$

Solusi

Cerdas

Sebuah mobil dengan kecepatan 36 km/jam direm mendadak sehingga terbentuk bekas di jalan sepanjang 20 m. Waktu pengereman yang dibutuhkan sampai mobil tersebut berhenti adalah

- a. 2 s d. 8 s
b. 4 s e. 10 s
c. 6 s

Penyelesaian

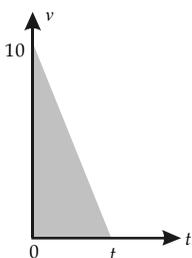
Diketahui: $v_0 = 36 \text{ km/jam}$
 $= 10 \text{ m/s}$

$\Delta r = \text{luas segitiga}$

maka,

$$20 = \left(\frac{1}{2}\right)(t)(10)$$

$$t = 4 \text{ s}$$



Jawab: d

Soal SMPB 2005 Regional III

Gambar 1.10

Luas daerah yang diarsir menyatakan besar perpindahan yang dilakukan benda dalam selang waktu $t = 0$ sampai dengan $t = 2$.

4. Menentukan Posisi dari Fungsi Kecepatan

Fungsi posisi suatu benda, yaitu koordinat benda (x, y) dapat diperoleh dengan cara mengintegalkan persamaan kecepatan benda sebagai fungsi waktu.

Dalam arah sumbu- x , fungsi posisi benda diturunkan sebagai berikut.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \text{ atau } dx = v_x dt$$

Posisi x ditentukan dengan

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t v_x dt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt$$

Dalam arah sumbu- y , fungsi posisi benda diturunkan sebagai berikut.

$$v_y = \frac{dy}{dt} \text{ atau } dy = v_y dt$$

Posisi y ditentukan dengan

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^t v_y dt \Rightarrow y - y_0 = \int_0^t v_y dt$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y dt$$

(x_0, y_0) menyatakan koordinat posisi awal benda, sedangkan (x, y) menyatakan koordinat posisi benda setelah bergerak dalam selang waktu t .

Apabila dituliskan dalam bentuk vektor, posisi benda dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} = \left(x_0 + \int_0^t v_x dt\right)\mathbf{i} + \left(y_0 + \int_0^t v_y dt\right)\mathbf{j} \quad (1-16)$$

atau

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int \mathbf{v} dt \quad (1-17)$$

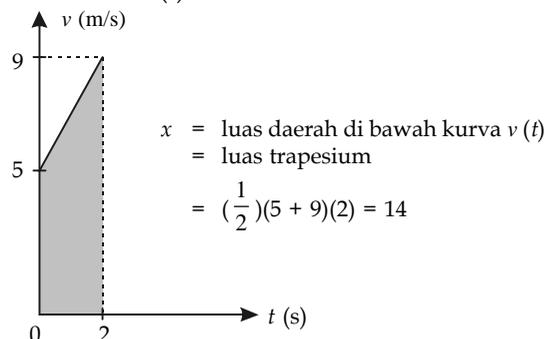
Secara matematis, integral adalah penjumlahan yang kontinu. Dengan demikian, posisi benda dapat ditentukan dengan metode grafik sebagai berikut. Apabila kecepatan sebuah benda dinyatakan dengan persamaan $v_x = 2t + 5$, posisi benda adalah

$$x = \int_0^t (2t + 5) dt = \int_0^t 2t dt + \int_0^t 5 dt = t^2 + 5t \Big|_0^t$$

Misalkan, batas integral adalah dari $t = 0$ sampai dengan $t = 2$. Dengan memasukkan nilai batas integral, didapatkan perpindahan benda adalah

$$x = t^2 + 5t \Big|_0^2 = [2^2 + (5)(2)] - [0^2 + (5)(0)] = 14$$

Cara lain untuk menentukan perpindahan benda adalah dengan menghitung luas daerah di bawah kurva $v(t)$.



Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa besar perpindahan benda sama dengan luas di bawah kurva kecepatan sebagai fungsi waktu $v(t)$. Secara matematis dituliskan sebagai berikut.

$$\Delta \mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt \quad (1-18)$$

Contoh 1.4

Sebuah benda bergerak pada bidang xy . Pada posisi awal, benda berada pada koordinat $(3,2)$ m. Komponen-komponen kecepatan benda memenuhi persamaan $v_x = 12 + 4t$ dan $v_y = 9 + 3t$ dengan v_x dan v_y dalam m/s, dan t dalam sekon. Tentukanlah:

- persamaan umum vektor posisi benda,
- posisi benda pada saat $t = 3$ sekon, dan
- perpindahan benda antara $t = 1$ sekon dan $t = 3$ sekon.

Jawab

Diketahui: posisi awal benda $(3, 2)$ m, $v_x = 12 + 4t$, dan $v_y = 9 + 3t$.

- Posisi awal benda $(3,2)$ m maka $x_0 = 3$ m dan $y_0 = 2$ m. Dengan demikian, diperoleh

$$\mathbf{r} = (x_0 + \int_0^t v_x dt)\mathbf{i} + (y_0 + \int_0^t v_y dt)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} = [3 + \int_0^t (12 + 4t)]\mathbf{i} + [2 + \int_0^t (9 + 3t)]\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} = (3 + 12t + 2t^2)\mathbf{i} + (2 + 9t + \frac{3}{2}t^2)\mathbf{j}.$$

- Posisi benda pada saat $t = 3$ sekon adalah
 $x = 3 + (12)(3) + (2)(3^2) = 57$ m

$$y = 2 + (9)(3) + (\frac{3}{2})(3^2) = 42,5$$
 m

Jadi, pada saat $t = 3$ sekon vektor posisi benda dapat dituliskan sebagai $\mathbf{r} = (57\mathbf{i} + 42,5\mathbf{j})$ meter.

- Pada $t_1 = 1$ sekon maka $\mathbf{r}_1 = [3 + (12)(1) + (2)(1^2)]\mathbf{i} + [2 + (9)(1) + (\frac{3}{2})(1^2)]\mathbf{j}$
 $= (17\mathbf{i} + 12,5\mathbf{j})$ meter

Pada $t_2 = 3$ sekon maka $\mathbf{r}_2 = [3 + (12)(3) + (2)(3^2)]\mathbf{i} + [2 + (9)(3) + (\frac{3}{2})(3^2)]\mathbf{j}$
 $= (57\mathbf{i} + 42,5\mathbf{j})$ meter

Perpindahan partikel dari $t_1 = 1$ sekon hingga $t_2 = 3$ sekon adalah

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (57\mathbf{i} + 42,5\mathbf{j}) - (17\mathbf{i} + 12,5\mathbf{j}) = (40\mathbf{i} + 30\mathbf{j})$$
 meter

Besar vektor $\Delta \mathbf{r}$ adalah

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2.500} = 50$$
 meter



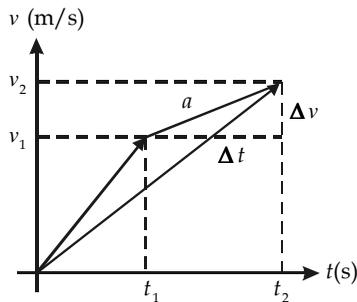
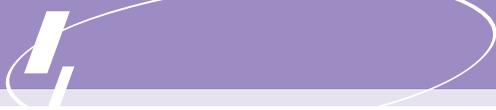
Sumber: Fisika untuk Sains dan Teknik, 1991

Gambar 1.11

Foto dari sebuah apel yang dijatuhkan. Gambar diambil sebanyak 60 kali setiap sekon agar percepatannya dapat diamati. Percepatan apel ditandai dengan jarak antartitik apel yang semakin besar di bagian bawah foto.

5. Percepatan Rata-Rata dan Percepatan Sesaat

Percepatan adalah perubahan kecepatan per satuan waktu. Perubahan kecepatan per satuan waktu yang bernilai positif disebut percepatan, sedangkan yang bernilai negatif disebut perlambatan. Sebagaimana halnya dengan kecepatan, pembahasan percepatan juga terbagi atas dua, yaitu percepatan rata-rata dan percepatan sesaat.



Gambar 1.12
Grafik percepatan

Jelajah Fisika
Jatuh Bebas



Dahulu orang percaya pada gagasan Aristoteles mengenai benda jatuh, yaitu benda yang lebih berat akan lebih dulu mencapai tanah dibandingkan benda yang lebih ringan. Melalui percobaannya dengan mengukur waktu tempuh bola-bola yang digelindingkan pada suatu bidang miring, Galileo membantah gagasan Aristoteles tersebut. Dari hasil percobaannya, Galileo berkesimpulan bahwa waktu yang dibutuhkan kedua benda jatuh untuk mencapai tanah adalah sama.

Sumber: Jendela Iptek, 1997

a. Percepatan Rata-Rata

Perhatikanlah **Gambar 1.12**. Grafik kecepatan terhadap waktu pada gambar tersebut menyatakan gerak benda yang berpindah dengan kecepatan tertentu setiap saatnya. Apabila pada saat \$t\$ kecepatan benda adalah \$v\$ dan pada saat \$t + \Delta t\$ kecepatannya \$v + \Delta v\$, percepatan rata-rata benda tersebut (\$\bar{a}\$) dinyatakan sebagai berikut.

$$\bar{a} = \frac{(v + \Delta v) - v}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1-19)$$

Penulisan **Persamaan (1-19)** dalam bentuk vektor dalam arah sumbu-\$x\$ dan sumbu-\$y\$ adalah sebagai berikut.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v_x \mathbf{i} + \Delta v_y \mathbf{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \mathbf{j} \quad (1-20)$$

Oleh karena \$\Delta v_x = \bar{a}_x\$ dan \$\Delta v_y = \bar{a}_y\$, **Persamaan (1-20)** dapat ditulis menjadi

$$\bar{a} = \bar{a}_x \mathbf{i} + \bar{a}_y \mathbf{j} \quad (1-21)$$

Besar percepatan rata-rata dinyatakan sebagai

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2} \quad (1-22)$$

Arah percepatan rata-rata dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\tan \theta = \frac{\bar{a}_y}{\bar{a}_x} \quad (1-23)$$

b. Percepatan Sesaat

Percepatan sesaat merupakan kecepatan rata-rata untuk selang waktu \$\Delta t\$ yang sangat kecil atau mendekati nol. Secara matematis, persamaannya dituliskan sebagai berikut.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1-24)$$

Apabila vektornya disesuaikan menurut arah sumbu-\$x\$ dan sumbu-\$y\$, **Persamaan (1-24)** berubah menjadi

$$a = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \quad (1-25)$$

Oleh karena \$v = \frac{dr}{dt}\$ maka **Persamaan (1-25)** dapat dituliskan sebagai berikut

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} \quad (1-26)$$

Contoh 1.5

Sebuah partikel bergerak dengan fungsi kecepatan \$v(t) = 2t^2 - 3t + 10\$ jika \$v\$ dinyatakan dalam m/s dan \$t\$ dalam sekon, tentukanlah:

- percepatan rata-rata partikel untuk selang waktu \$t = 2\$ sekon sampai \$t = 4\$ sekon,
- percepatan awal partikel, dan
- percepatan partikel pada saat \$t = 6\$ sekon.

Jawab

Diketahui: $v(t) = 2t^2 - 3t + 10$.

- a. Untuk menghitung percepatan rata-rata, tentukan lebih dahulu Δv dan Δt sebagai berikut.

Persamaan umum kecepatan adalah $v(t) = 2t^2 - 3t + 10$ sehingga

untuk $t_2 = 4$ sekon, $v_2 = 2(4)^2 - 3(4) + 10 = 30$ m/s

untuk $t_1 = 2$ sekon, $v_1 = 2(2)^2 - 3(2) + 10 = 12$ m/s

$$\text{Diperoleh } \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{30 - 12}{4 - 2} = 9 \text{ m/s}^2.$$

- b. Persamaan umum percepatan sesaat diperoleh sebagai turunan pertama dari fungsi kecepatan, yaitu

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (2t^2 - 3t + 10) = (4t - 3) \text{ m/s}^2.$$

Percepatan awal partikel adalah percepatan pada $t = 0$ sehingga

$$a = 4(0) - 3 = -3 \text{ m/s}^2.$$

- c. Percepatan partikel pada saat $t = 6$ sekon adalah

$$a = 4(6) - 3 = 21 \text{ m/s}^2.$$

Contoh 1.6

Sebuah mobil bergerak dengan grafik kecepatan (v) terhadap waktu (t) seperti terlihat pada gambar disamping.

Tentukanlah:

- a. percepatan rata-rata benda antara $t = 0$ sekon sampai $t = 4$ sekon, dan
b. percepatan rata-rata benda antara $t = 4$ sekon sampai $t = 8$ sekon

Jawab

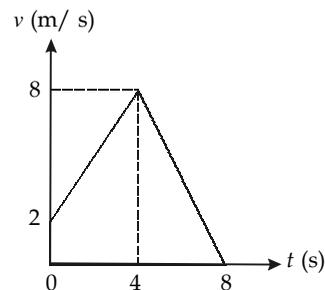
Diketahui: grafik $v - t$.

- a. Percepatan rata-rata benda antara $t = 0$ sampai $t = 4$ sekon, yaitu

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{8 - 2}{4 - 0} = 1,5 \text{ m/s}^2.$$

- b. Percepatan rata-rata benda antara $t = 4$ sampai $t = 8$ sekon, yaitu

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 8}{8 - 4} = -2 \text{ m/s}^2.$$



6. Menentukan Kecepatan dari Fungsi Percepatan

Fungsi kecepatan dapat diperoleh dari fungsi percepatan dengan metode integral, yaitu

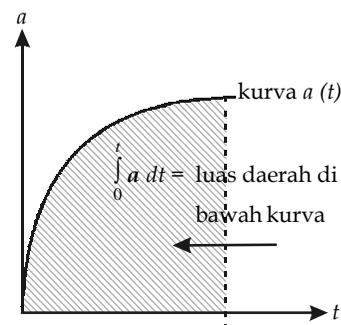
$$v = v_0 + \int_0^t a \, dt$$

atau

$$v = (v_{0x} + \int a_x \, dt)\mathbf{i} + (v_{0y} + \int a_y \, dt)\mathbf{j} \quad (1-27)$$

Secara matematis, integral adalah penjumlahan yang kontinu. Metode yang digunakan untuk memperoleh nilai kecepatan dari fungsi percepatan dapat dilakukan dengan analogi pada cara untuk mendapatkan nilai perpindahan dari fungsi kecepatan. Perhatikan **Gambar 1.13**. Kecepatan partikel secara grafik dapat ditentukan sebagai berikut.

Besar kecepatan = luas daerah di bawah kurva $a(t)$



Gambar 1.13

Luas daerah yang diarsir menyatakan besar kecepatan yang dilakukan benda dalam selang waktu t .



Contoh 1.7

Sebuah benda bergerak dengan kecepatan awal 3 m/s. Jika benda mengalami percepatan $a(t) = (4t - 2) \text{ m/s}^2$, tentukanlah:

- persamaan kecepatan benda, dan
- kecepatan benda pada $t = 2$ sekon.

Jawab

Diketahui: $v_0 = 3 \text{ m/s}$ dan $a(t) = (4t - 2) \text{ m/s}^2$.

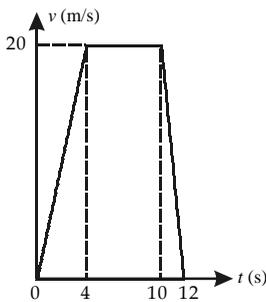
- Kecepatan dapat diperoleh dari fungsi percepatan dengan metode integral.

$$v = v_0 + \int a \, dt = 3 + \int (4t - 2) \, dt = (3 + 2t^2 - 2t) \text{ m/s}^2.$$

- Kecepatan benda pada saat $t = 2$ sekon adalah

$$v = 3 + (2)(2)^2 - (2)(2) = 7 \text{ m/s}.$$

Solusi Cerdas



Sebuah mobil bergerak dengan grafik kecepatan terhadap waktu, seperti terlihat pada gambar. Pada Interval waktu antara 10 sekon hingga 12 sekon, mobil bergerak ...

- lurus diperlambat dengan perlambatan 10 m/s^2
- lurus dipercepat dengan percepatan 10 m/s^2
- lurus dipercepat dengan percepatan 5 m/s^2
- lurus diperlambat dengan perlambatan 10 m/s^2
- lurus beraturan dengan kecepatan tetap sebesar 10 m/s

Penyelesaian

$$t_1 = 10 \rightarrow v_1 = 20 \text{ m/s}$$

$$t_2 = 12 \rightarrow v_2 = 0 \text{ m/s}$$

Dalam selang waktu antara 10 sekon hingga 12 sekon

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 20}{12 - 10}$$

$$a = -10 \text{ m/s}^2$$

Jawab: a

7. Gerak Lurus Beraturan dan Gerak Lurus Berubah Beraturan

Di Kelas X, Anda telah mengenal dan mempelajari dua jenis gerak lurus, yaitu gerak lurus beraturan (GLB) dan gerak lurus berubah beraturan (GLBB). Pada gerak lurus beraturan, kecepatan gerak benda tetap dan percepatan benda sama dengan nol. Persamaan geraknya diperoleh melalui persamaan

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v \, dt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t v \, dt$$

Pada GLB, nilai v tetap dan tidak bergantung pada waktu sehingga persamaan dapat dituliskan menjadi

$$\int_{s_0}^s ds = v \int_{t_0}^t dt \Rightarrow s - s_0 = vt$$

Dengan demikian, dapat dituliskan persamaan

$$s = s_0 + vt \quad (1-28)$$

dengan s_0 merupakan jarak tempuh benda pada saat $t = 0$.

Pada gerak lurus berubah beraturan (GLBB), benda bergerak dengan percepatan tetap. Persamaan geraknya diperoleh melalui

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \, dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v_t} dv = \int_0^t a \, dt$$

Pada GLBB, nilai a tetap dan tidak bergantung waktu sehingga persamaan dapat dituliskan menjadi

$$\int_{v_0}^{v_t} dv = a \int_0^t dt \Rightarrow v_t - v_0 = at$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$v_t = v_0 + at \quad (1-29)$$

atau

$$t = \frac{v_t - v_0}{a} \quad (1-30)$$

Apabila **Persamaan (1-29)** diintegrasikan, akan diperoleh jarak tempuh benda, yaitu

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v(t) \, dt$$

Oleh karena $v(t) = v_0 + at$ maka

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

$$s - s_0 = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t (at) dt = v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt$$

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1-31)$$

Jika $s_0 = 0$, akan diperoleh persamaan

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1-32)$$

Kemudian, jika **Persamaan (1-30)** disubstitusikan ke **Persamaan (1-32)** diperoleh

$$s = v_0 \left(\frac{v_t - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v_t - v_0}{a} \right)^2$$

$$s = \left(\frac{v_0 v_t - v_0^2}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v_t^2 - 2v_t v_0 - v_0^2}{a^2} \right)$$

$$2s = 2 \left(\frac{v_0 v_t - v_0^2}{a} \right) + a \left(\frac{v_t^2 - 2v_t v_0 - v_0^2}{a} \right)$$

$$2as = 2v_0 v_t - 2v_0^2 + v_t^2 - 2v_0 v_t + v_0^2$$

$$v_t^2 = v_0^2 + 2as \quad (1-33)$$

Kata Kunci

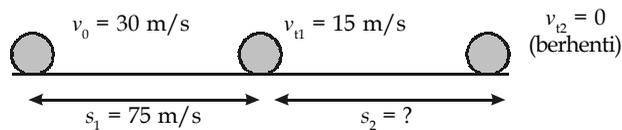
- Vektor posisi
- Vektor kecepatan
- Vektor percepatan
- Gerak lurus beraturan
- Gerak lurus berubah beraturan

Contoh 1.8

Besar kecepatan suatu partikel yang mengalami perlambatan konstan ternyata berubah dari 30 m/s menjadi 15 m/s setelah menempuh jarak sejauh 75 m. Setelah menempuh jarak berapa lagi partikel tersebut berhenti?

Jawab

Diketahui: $v_0 = 30$ m/s, $v_{t1} = 15$ m/s, $v_{t2} = 0$ m/s, dan $s = 75$ m



$$a = \frac{v_{t1}^2 - v_0^2}{2s_1} = \frac{15^2 - 30^2}{2(75)} = -4,5 \text{ m/s}^2.$$

$$s_2 = \frac{v_{t2}^2 - v_{t1}^2}{2a} = \frac{0^2 - 15^2}{2(-4,5)} = 25 \text{ m}.$$

Soal Penguasaan Materi 1.1

Kerjakanlah di dalam buku latihan Anda.

- Seekor semut bergerak dari titik A $(-2, 5)$ ke titik B $(7, -7)$. Tentukanlah:
 - vektor posisi semut itu saat berada di titik A dan di titik B, dan
 - vektor perpindahan dari titik A ke titik B, serta besar vektor perpindahan tersebut.
- Sebuah partikel sedang bergerak pada suatu bidang dengan sumbu koordinat x dan y . Posisi partikel berubah terhadap waktu mengikuti persamaan $r = (3 - 6t + 3t^2)\mathbf{i} + (4 - 8t + 4t^2)\mathbf{j}$ dengan r dalam meter dan t dalam sekon. Tentukanlah:
 - perpindahan partikel dalam selang waktu $t = 2$ sekon sampai dengan $t = 4$ sekon,
 - besar kecepatan rata-rata partikel dalam selang waktu $t = 2$ sekon sampai dengan $t = 4$ sekon, dan
 - besar dan arah kecepatan partikel tersebut pada saat $t = 2$ sekon.
- Sebuah benda bergerak pada bidang xy . Pada saat awal, benda berada di koordinat $(5, 2)$ m komponen-komponen kecepatan benda memenuhi persamaan $v_x = 12 + 3t$ dan $v_y = 16 + 4t$ dengan v_x dan v_y dalam m/s, dan t dalam sekon. Tentukanlah:
 - persamaan umum vektor posisi benda,
 - posisi benda pada saat $t = 2$ sekon, dan
 - perpindahan benda antara $t = 0$ sekon dan $t = 4$ sekon.
- Sebuah partikel bergerak dengan fungsi kecepatan $v(t) = (2,5t - 4)\mathbf{i} + (6t + 3)\mathbf{j}$ dengan v dalam m/s dan t dalam sekon. Tentukanlah:
 - percepatan rata-rata partikel untuk selang waktu $t = 0$ sekon sampai $t = 3$ sekon, dan
 - percepatan benda pada $t = 2$ sekon.
- Benda bergerak dengan kecepatan awal 3 m/s. Jika benda mengalami percepatan $a(t) = (4t - 2)$ m/s², tentukanlah:
 - persamaan kecepatan benda, dan
 - kecepatan benda pada $t = 2$ sekon.

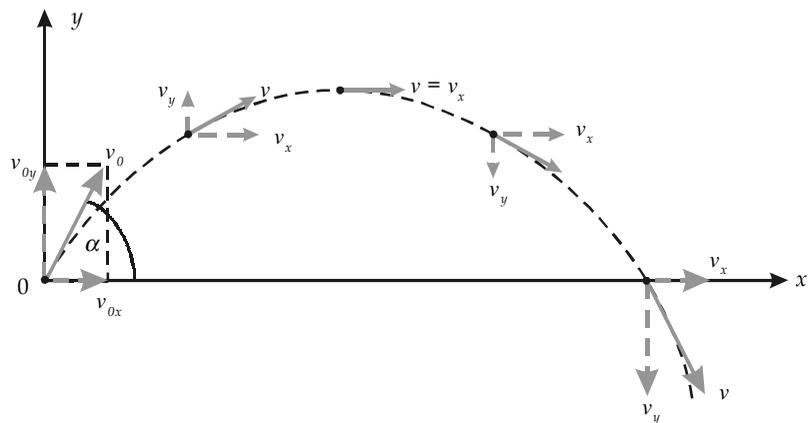
B Gerak Parabola



Gambar 1.14

Lintasan bola basket saat dilemparkan ke dalam ring akan berbentuk parabola.

Perhatikanlah lintasan yang dibentuk oleh bola basket yang dilemparkan ke dalam ring pada **Gambar 1.14**. Lintasan bola basket tersebut berbentuk parabola. Gerak yang lintasannya berbentuk parabola disebut gerak parabola. Contoh umum gerak parabola adalah gerak benda yang dilemparkan ke atas membentuk sudut tertentu terhadap permukaan tanah. Gerak parabola dapat dipandang dalam dua arah, yaitu arah vertikal (sumbu- y) yang merupakan gerak lurus berubah beraturan (GLBB), dan arah horizontal (sumbu- x) yang merupakan gerak lurus beraturan (GLB). Perhatikan **Gambar 1.15** berikut.



Gambar 1.15

Arah gaya pada lintasan gerak parabola.

Gerak pada sumbu- x (horizontal) adalah gerak lurus beraturan karena kecepatan benda di setiap titik bernilai konstan dan berlaku persamaan

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad (1-34)$$